

LABORATORIUM AKUSTYKI

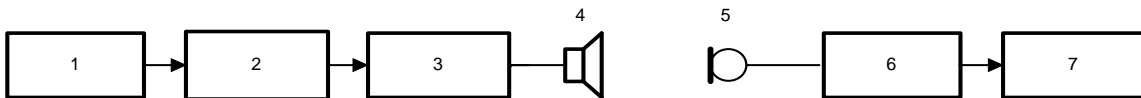
ĆWICZENIE NR 3

Pomiar i analiza ciśnienia akustycznego

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie sposobu pomiaru i analizy widmowej przebiegów akustycznych.

2. Układ pomiarowy



1 - generator, 2- korektor graficzny, 3- wzmacniacz mocy, 4 - głośnik (źródło dźwięku), 5 - mikrofon, 6 - analizator tercjowo-oktawowy, 7 - rejestrator poziomu.

3. Zadanie laboratoryjne

- 3.1. Przeprowadzić wzorcowanie toru mikrofonowego (pomiarowego) przy użyciu pistonfonu.
- 3.2. Dokonać analizy częstotliwościowej w pasmach tercjowych szumu białego i różowego. Wyjaśnić różnice w przebiegach zmierzonych widm tercjowych.
- 3.3. Zmierzyć tercjowe widmo poziomu mocy szumu ukształtowanego za pomocą korektora graficznego i jego poziom dźwięku A.
 - Obliczyć, na podstawie zmierzonego tercjowego widma poziomu mocy, poziom dźwięku A i porównać z wartością zmierzoną.
 - Dokonać analizy błędów metodą różniczki zupełnej.
- 3.4. Zmierzyć widmo amplitudy ciągu impulsów prostokątnych lub impulsów tonalnych o zdanych parametrach.
 - Obliczyć, na podstawie zmierzonego widma amplitudy, poziom dźwięku A i porównać z wartością zmierzoną.
 - Dokonać analizy błędów metodą różniczki zupełnej.

4. Zagadnienia do przygotowania

- 4.1. Wzorcowanie mikrofonowego toru pomiarowego.
- 4.2. Poziomy wielkości akustycznych.
- 4.3. Filtry tercjowe i oktawowe oraz filtr korekcyjny A.
- 4.4. Analiza widmowa sygnałów.

Literatura

- [1] A. Dobrucki, Podstawy akustyki. Skrypt PWr., Wrocław 1987
- [2] Z. Żyszkowski, Miernictwo akustyczne. WNT, W-wa 1987, rozdz. 2.
- [3] A. Januszajtis, Fizyka dla politechnik. Tom III Fale. PWN W-wa 1991, ss.234-237.
- [4] J. Sereba, Pomiar w elektroakustyce. W-wa 1981, str. 53-58, 68-75.

**WYNIKI POMIARÓW I OBLICZEŃ POZIOMU DŹWIĘKU A
CIAĞU IMPULSÓW PROSTOKĄTNYCH**

Tabela 1. Wyniki pomiarów parametrów ciągu impulsów prostokątnych $x(t)$.

A [V]	f_r [Hz]	T_r [ms]	t_o [ms]	$m = \frac{t_o}{T_r}$	$x_{rms,T_r} \pm \Delta x$ [V]	$x_{av,T_r} \pm \Delta x$ [V]	$\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$

Tabela 2. Wyniki pomiarów stałej skalowania S .

$L_x = 20 \lg \left(\frac{x_{rms}}{x_o} \right)$, dB ref. $x_o=1$ [V]	
$L_p = 20 \lg \left(\frac{p_{rms}}{p_o} \right)$, dB ref. $p_o=2 \cdot 10^{-5}$ [Pa]	
$L_s = L_p - L_x$, dB ref. $S_o=p_o/x_o$	
$S = S_o 10^{0.05(L_p-L_x)}$, [Pa/V]	
ΔL_p , dB, błąd odczytu L_p	
$\Delta L_x \leq 20 \lg(1 - \delta_x)$, dB, błąd odczytu L_x	
$\Delta L_s = \Delta L_p + \Delta L_x$, dB	

Tabela 3. Wyniki pomiarów widma FFT ciągu impulsów prostokątnych $x(t)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
nf_r , [Hz]								
L_{x_n} , dB wzgl. $x_o=1$ V								
$L_{p_n} = L_{x_n} + L_s$, dB ref. $p_o=2 \cdot 10^{-5}$ Pa								
$\Delta L_{p_n} = \Delta L_{x_n} + \Delta L_s$, dB								
$K_{A,n}$, dB, wg krzywej korekcyjnej A								
$L_{p_n} + K_{A,n}$, dB								
$L_A = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_n} + K_{A,n})} \right)$, dB								
$\Delta L_A = \sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_n} + K_{A,n} - L_A)} \Delta L_{p_n}$, dB								

Tabela 4. Wyniki pomiarów widma 1/3 oktawowego ciągu impulsów prostokątnych $x(t)$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i , [Hz], częstotliwość środkowa pasma 1/3oktaw.								
L_{p_i} , dB wzgl. $p_o=2 \cdot 10^{-5}$ Pa								
$K_{A,i}$, dB, wg krzywej korekcyjnej A								
$L_{p_i} + K_{A,i}$, dB								
$L_A = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_i} + K_{A,i})} \right)$, dB								
$\Delta L_A = \sum_{i=1}^N 10^{0.1(L_{p_i} + K_{A,i} - L_A)} \Delta L_{p_i}$, dB								
$L_A \pm \Delta L_A$, dB, zmierzone								

**WYNIKI OBLICZEŃ TEORETYCZNYCH POZIOMU DŹWIĘKU A
CIĄGU IMPULSÓW PROSTOKĄTNYCH**

Tabela 1a. Wyniki obliczeń parametrów ciągu impulsów prostokątnych $x(t)$.

A [V]	T_r [ms]	$f_r = 1/T_r$ [Hz]	t_o [ms]	$m = \frac{t_o}{T_r}$	$x_{rms,T_r} = A\sqrt{m}$ [V]	$x_{av,T_r} = Am$ [V]

Tabela 3a. Wyniki obliczeń widma FFT ciągu impulsów prostokątnych $x(t)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
nf_r , [Hz]								
$\alpha = \pi nm$, rad								
$ Sa(\alpha) = \left \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right $								
$x_{n,rms} = \sqrt{2}Am Sa(\alpha) $, [V]								
$L_{x_n} = 20 \lg \left(\frac{x_{n,rms}}{x_o} \right)$, dB ref. $x_o=1V$								
$L_{p_n} = L_{x_n} + L_s$, dB ref. $p_o=2 \cdot 10^{-5}Pa$								
$K_{A,n}$, dB								
$L_{p_n} + K_{A,n}$, dB								
$L_A = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_n} + K_{A,n})} \right)$, dB								

**WYNIKI POMIARÓW I OBLICZEŃ POZIOMU DŹWIĘKU A
CIĄGU IMPULSÓW TONALNYCH**

Tabela 1. Wyniki pomiarów parametrów ciągu impulsów tonalnych $y(t)$ wg (1).

$y(t)$	A [V]	T_o [ms]	t_o [ms]	$k = \frac{4t_o}{T_o}$	$a = \frac{T_r}{T_o}$	$m = \frac{k}{4a}$	$y_{rms,T_r} \pm \Delta y$ [V]	$y_{av,T_r} \pm \Delta y$ [V]	$\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$
$y_1 = x(t) \sin \omega_o t$									
$y_2 = x(t) \cos \omega_o t$									

Uwaga: Musi być spełniony warunek wg (1a) i (1b): $a > \frac{k}{4}$, przy czym $a, k = 1, 2, \dots$

Tabela 2. Wyniki pomiarów stałej skalowania S .

$L_y = 20 \lg \left(\frac{y_{rms,T_r}}{y_o} \right)$, dB wzgl. $y_o=1$ [V]	
$L_p = 20 \lg \left(\frac{p_{rms}}{p_o} \right)$, dB wzgl. $p_o=2 \cdot 10^{-5}$ [Pa]	
$L_s = L_p - L_y$, dB wzgl. $S_o=p_o/y_o$	
$S = S_o 10^{0.05(L_p - L_x)}$, [Pa/V]	
ΔL_p , dB, błąd odczytu L_p	
$\Delta L_y \leq 20 \lg(1 - \delta_y)$, dB, błąd obliczeń L_y	
$\Delta L_s = \Delta L_p + \Delta L_y$, dB	

Tabela 3. Wyniki pomiarów widma FFT ciągu impulsów tonalnych $y_1 = x(t) \sin \omega_0 t$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_n = n f_r$, [Hz]								
$L_{y_n} \pm \Delta L_{y_n}$, dB wzgl. $y_0=1V$								
$L_{p_n} = L_{y_n} + L_S$, dB wzgl. $p_0=2 \cdot 10^{-5} Pa$								
$\Delta L_{p_n} = \Delta L_{y_n} + \Delta L_S$, dB								
$K_{A,n}$, dB, wg krzywej korekcyjnej A								
$L_{p_n} + K_{A,n}$, dB								
$L_A = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_n} + K_{A,n})} \right)$, dB								
$\Delta L_A = \sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_n} + K_{A,n} - L_A)} \Delta L_{p_n}$, dB								

Tabela 4. Wyniki pomiarów widma FFT ciągu impulsów tonalnych $y_2 = x(t) \cos \omega_0 t$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_n = n f_r$, [Hz]								
$L_{y_n} \pm \Delta L_{y_n}$, dB wzgl. $y_0=1V$								
$L_{p_n} = L_{y_n} + L_S$, dB wzgl. $p_0=2 \cdot 10^{-5} Pa$								
$\Delta L_{p_n} = \Delta L_{y_n} + \Delta L_S$, dB								
$K_{A,n}$, dB, wg krzywej korekcyjnej A								
$L_{p_n} + K_{A,n}$, dB								
$L_A = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_n} + K_{A,n})} \right)$, dB								
$\Delta L_A = \sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_n} + K_{A,n} - L_A)} \Delta L_{p_n}$, dB								

Tabela 5. Wyniki pomiarów widma 1/3 oktaw. ciągu impulsów tonalnych $y_1 = x(t) \sin \omega_0 t$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i [Hz], częstotliwość środkowa pasma 1/3 oktawowego								
$L_{p_i} \pm \Delta L_{p_i}$, dB wzgl. $p_0=2 \cdot 10^{-5}$ Pa								
$K_{A,i}$, dB, wg krzywej korekcyjnej A								
$L_{p_i} + K_{A,i}$, dB								
$L_A = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_i} + K_{A,i})} \right)$, dB								
$\Delta L_A = \sum_{i=1}^N 10^{0.1(L_{p_i} + K_{A,i} - L_A)} \Delta L_{p_i}$, dB								
$L_A \pm \Delta L_A$, dB, zmierzone								

Tabela 6. Wyniki pomiarów widma 1/3 oktaw. ciągu impulsów tonalnych $y_2 = x(t) \cos \omega_0 t$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i [Hz], częstotliwość środkowa pasma 1/3 oktawowego								
$L_{p_i} \pm \Delta L_{p_i}$, dB wzgl. $p_0=2 \cdot 10^{-5}$ Pa								
$K_{A,i}$, dB, wg krzywej korekcyjnej A								
$L_{p_i} + K_{A,i}$, dB								
$L_A = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_i} + K_{A,i})} \right)$, dB								
$\Delta L_A = \sum_{i=1}^N 10^{0.1(L_{p_i} + K_{A,i} - L_A)} \Delta L_{p_i}$, dB								
$L_A \pm \Delta L_A$, dB, zmierzone								

**WYNIKI OBLICZEŃ TEORETYCZNYCH POZIOMU DŹWIĘKU A
CIĄGU IMPULSÓW TONALNYCH**

Tabela 1a. Wyniki obliczeń parametrów ciągu impulsów tonalnych $y(t)$ o okresie T_r .

$y(t)$	A [V]	T_o [ms]	t_o [ms]	T_r [ms]	$a = \frac{T_r}{T_o}$	$k = \frac{4t_o}{T_o}$	$m = \frac{k}{4a}$	$y_{rms,T_r} = A\sqrt{\frac{m}{2}}$ [V]	F_o [V]
$y_1 = x(t) \sin \omega_0 t$									
$y_2 = x(t) \cos \omega_0 t$									

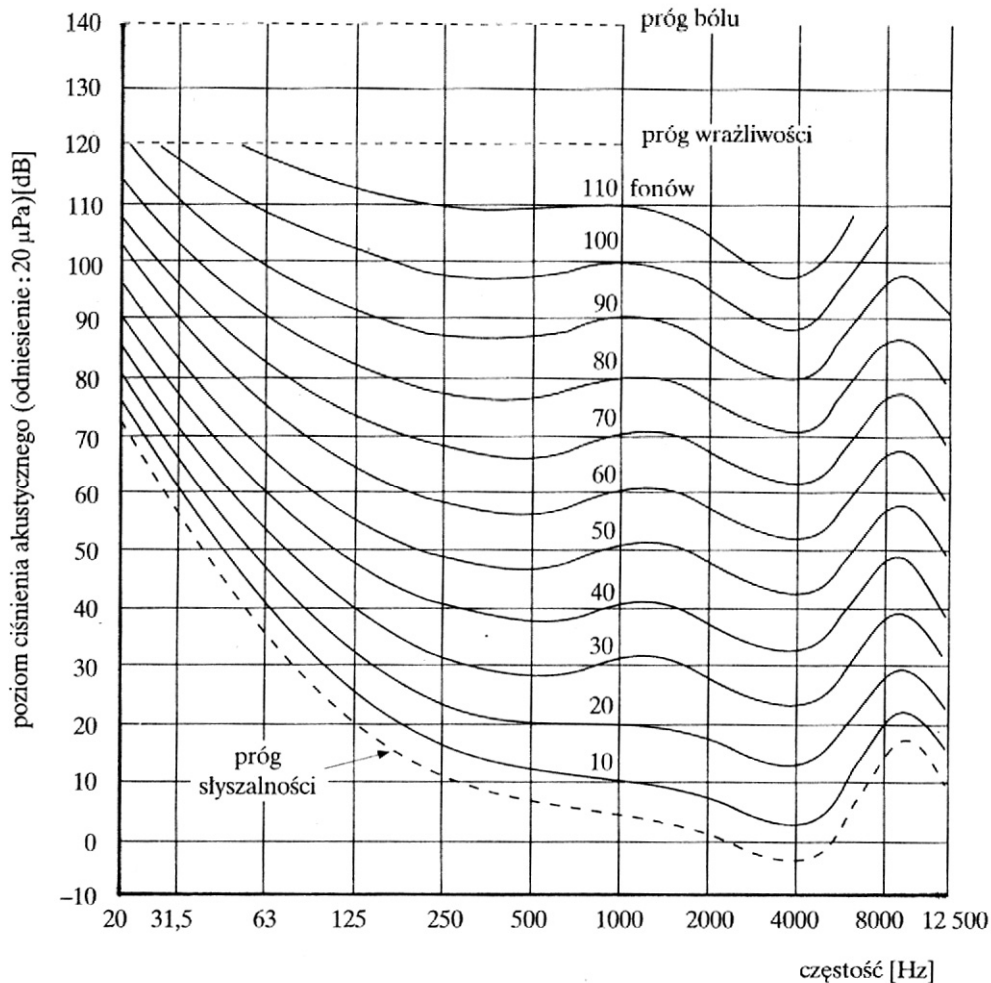
Uwaga: Musi być spełniony warunek wg (1a) i (1b): $a \geq k/4$, przy czym $a, k = 1, 2, \dots$

Tabela 3a. Wyniki obliczeń widma FFT ciągu impulsów tonalnych $y(t)$ o okresie T_r .

n	1	2	3	4	5	6	7	8
nf_r , [Hz]								
$\alpha_1 = (n+a)m\pi$, rad								
$\alpha_2 = (n-a)m\pi$, rad								
$Sa(\alpha_1) = \sin(\alpha_1)/\alpha_1$								
$Sa(\alpha_2) = \sin(\alpha_2)/\alpha_2$								
$ Sa(\alpha_1) - Sa(\alpha_2) $								
$ Sa(\alpha_1) + Sa(\alpha_2) $								
$y_{1,n,rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} Am Sa(\alpha_1) - Sa(\alpha_2) $, V								
$y_{2,n,rms} = \frac{\sqrt{2}}{2} Am Sa(\alpha_1) + Sa(\alpha_2) $, V								
$L_{y_{1,n}} = 20 \lg \left(\frac{y_{1,n,rms}}{y_o} \right)$, dB ref. $y_o=1V$								
$L_{y_{2,n}} = 20 \lg \left(\frac{y_{2,n,rms}}{y_o} \right)$, dB ref. $y_o=1V$								
$L_{p_{1,n}} = L_{y_{1,n}} + L_S$, dB ref. $p_o=2 \cdot 10^{-5} Pa$								
$L_{p_{2,n}} = L_{y_{2,n}} + L_S$, dB ref. $p_o=2 \cdot 10^{-5} Pa$								
$K_{A,n}$, dB								
$L_{p_{1,n}} + K_{A,n}$, dB								
$L_{p_{2,n}} + K_{A,n}$, dB								
$L_{1,A} = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_{1,n}} + K_{A,n})} \right)$, dB								
$L_{2,A} = 10 \lg \left(\sum_{n=1}^N 10^{0.1(L_{p_{2,n}} + K_{A,n})} \right)$, dB								

1. ZDOLNOŚĆ PERCEPCYJNA CZŁOWIEKA

Percepcja jest procesem przetwarzania informacji przez zmysły, dla wytworzenia mentalnego obrazu świata. Percepcja jest więc pobraniem danych na wejściu do odpowiedniego układu sensorycznego i utworzeniem z nich użytecznego obrazu. Zdolność odbierania przez człowieka dźwięków i jego reakcja na nie, są uwarunkowane przetwarzaniem sygnałów dźwiękowych przez uszy i mózg. Czułość ucha ludzkiego na dźwięki zależy od ich częstotliwości. Rys. 1 przedstawia krzywe czułości ucha ludzkiego na dźwięki o pojedynczej częstotliwości. Kształty krzywych zostały uzyskane na podstawie wrażeń subiektywnych, przez porównanie głośności tonu do głośności tonu o częstotliwości 1000 Hz. Linia przerywaną zaznaczono próg słyszalności, który odnosi się do „osób dobrze słyszących”. W rzeczywistości dla ok. 95 % populacji próg ten leży znacznie wyżej.



Rys. 1.1. Krzywe jednakowego poziomu głośności (izofoniczne) ucha ludzkiego. Krzywe te łączą punkty odpowiadające różnym częstotliwościom i poziomom ciśnienia akustycznego, które odczuwane są jako jednakowo głośne. Otrzymano je w wyniku badania grupy osób ontologicznie normalnych w wieku 18-30 lat. Krzywe izofoniczne opracowane przez Robinsona i Dadsona zostały przyjęte jako norma międzynarodowa ISO 226 i odnoszą się do pola swobodnego fali płaskiej.

Krzywe izofoniczne na rys. 1.1 wskazują na względny spadek czułości ucha dla tonów niskich, zwłaszcza przy niższych poziomach ciśnienia akustycznego. Odpowiadający progowi słyszenia poziom ciśnienia akustycznego tonu o częstotliwości 1 kHz jest równy 0 dB

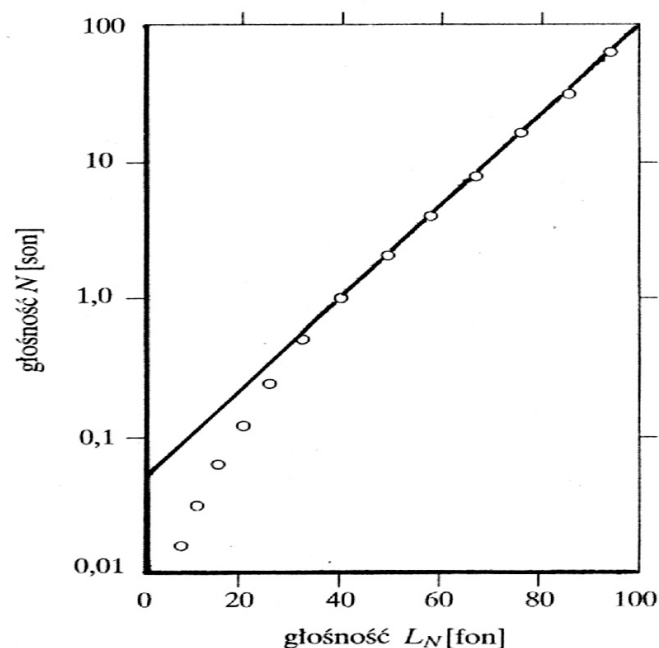
względem wartości odniesienia $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$, natomiast ton o częstotliwości 20 Hz musi mieć poziom ciśnienia akustycznego ok. 70 dB, aby ucho ludzkie mogło go usłyszeć. W zakresie maksymalnej czułości ucha ok. 2-5 kHz, tony mogą mieć poziomy ciśnienia akustycznego mniejsze od 0 dB i być słyszalne.

Każda z krzywych izofonicznych jest identyfikowana przez jej wartość dla częstotliwości 1 kHz. Pozwala to zdefiniować **poziom głośności** L_N dowolnego dźwięku w fonach, który jest liczbowo równy poziomowi ciśnienia akustycznego w dB tonu o częstotliwości $f = 1 \text{ kHz}$, który wywołuje, w ściśle określonych warunkach odbioru, wrażenie takiej samej głośności jak dźwięk badany. **Po odwróceniu krzywych izofonicznych otrzymuje się odpowiedź częstotliwościową ucha wyrażoną w poziomie głośności.**

Należy jednak zauważyć, że skala w fonach nie spełnia warunku addytywności i multiplikatywności. Oznacza to, że suma poziomów głośności kilku dźwięków słyszanych jednocześnie nie jest równa poziomowi głośności dźwięku wypadkowego, a n - krotne zwiększenie poziomu głośności dźwięku nie jest równoważne n - krotnemu zwiększeniu wrażenia głośności. Z tego względu wprowadzono do użytku praktycznego pojęcie głośności jako cechy dźwięku, umożliwiającej ocenę intensywności wywołanego przezeń subiektywnego wrażenia słuchowego i pozwalającej na porządkowanie odbieranych dźwięków od cichych do głośnych i odwrotnie.

Głośność N tonu o częstotliwości f jest tak zdefiniowana, aby podwojenie głośności oznaczało podwojenie wartości N , przy czym wartość $N = 1 \text{ son}$ odpowiada poziomowi głośności 40 fonów. Należy zauważyć, że głośność N jest niezależna od częstotliwości, ponieważ pokazana na rys. 1 zależność od f została już uwzględniona w definicji fonu.

Związek między głośnością N i poziomem głośności L_N , pokazany na rys. 1.2, został wyznaczony doświadczalnie przez dostatecznie liczną grupę osób odbierających dźwięki o różnych poziomach głośności.



Rys. 1.2. Doświadczalna zależność między subiektywną głośnością N w sonach i fizycznym poziomem głośności L_N w fonach; kółka – wg Fletchera i Munsona, linia ciągła – wg (1.1).

W skali półlogarytmicznej (log-lin), dla $L_N \geq 40$, fonów związek ten jest liniowy

$$\log N = aL_N + b,$$

i odpowiada zależności:

$$(1.1) \quad N = 0.046 \cdot 10^{L_N/30}.$$

Ponieważ dla $f = 1$ kHz poziom głośności L_N jest proporcjonalny do logarytmu natężenia akustycznego I (lub ciśnienia akustycznego), zatem

$$N = 0.046 \cdot 10^{\frac{1}{3} \lg \left(\frac{I}{I_0} \right)} = 0.046 \left(\frac{I}{I_0} \right)^{\frac{1}{3}} = 460 I^{\frac{1}{3}},$$

gdzie $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ jest wartością odniesienia dla I .

Dla dowolnej częstotliwości f wykładniczą zależność subiektywnego odczucia głośności N i fizycznej wielkości natężenia akustycznego I można zapisać w postaci:

$$(1.2) \quad N = 460 F(f) I^{1/3},$$

przy czym wartość funkcji $F(f)$ dla danej częstotliwości można wyznaczyć z rys. 1.1; dla $f = 1000 \text{ Hz}$, $F(f) = 1$.

Ostatnia zależność jest przykładem *prawa zdolności psychofizycznej*, które zostało sformułowane przez S. Stevensa (ok. połowy XX w.): „**jednakowe stosunki intensywności pobudzającego czynnika fizycznego I (bodźca) wywołują jednakowe stosunki wielkości subiektywnych skutków N (wrażeń)**. Odnosi się ono do takich wrażeń jak jaskrawość, porażenie elektryczne, nacisk dłoni czy głośność.

Wykres zależności N od I wg (1.1) przypomina nieco krzywą logarytmiczną, tj. zależność poziomu natężenia akustycznego L_I w dB od I , jeżeli weźmie się pod uwagę mniej niż dwa rzędy wielkości I (patrz zadanie 1.1). Ten fakt doprowadził niemieckiego fizyka i psychologa G.T. Fechnera (ok. 1860 roku) do postulowania błędnego prawa zdolności psychofizycznej w postaci:

$$N = 10 \lg I + \text{const.},$$

co oznaczałoby, że skala decybelowa natężenia akustycznego I jest dokładnie proporcjonalna do subiektywnej głośności N . Właśnie to błędne prawo było powodem wprowadzenia skali, której jednostką jest dB.

Zadanie 1.1

Na podstawie rys. 1.2 wyznaczyć wartość stałej we wzorze (1.1), równą 0.046.

Zadanie 1.2

Należy narysować w skali lin-lin wykres równania (1.2) dla $F(f) = 1$ oraz równania

$$L_N = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right) + c, \text{ dB wzgl. } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2;$$

w zakresie $10^{-7} \leq I \leq 10^{-5} \text{ W/m}^2$; stałą c należy tak dobrać, żeby obie krzywe przecięły się dla $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$. Porównaj przebiegi obu krzywych w okolicy punktu przecięcia.

2. SKALA LOGARYTMICZNA

Miara logarytmiczna jest miarą względną. Wartość wielkości fizycznej wyrażona w mierze logarytmicznej zależy od przyjętej wartości odniesienia dla danej wielkości.

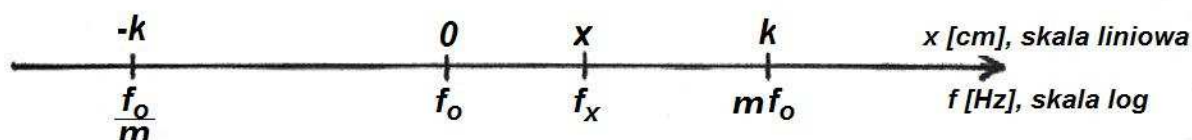
$$(2.1) \quad L_x = 10 \lg \frac{|x|}{x_o}, \text{ dB},$$

gdzie L_x jest poziomem danej wielkości fizycznej x , wyrażonej liczbą 'decybeli' (dB), natomiast x_o jest wartością odniesienia dla tej wielkości.

Tabela 2.1. Wartości odniesienia dla różnych wielkości fizycznych.

Wielkość fizyczna	Poziom wielkości fizycznej, dB	Wartość odniesienia (wg ISO 1683.2)
Ciśnienie akustyczne	$L_p = 20 \lg(p/p_o)$	20 μPa w powietrzu 1 μPa w innych ośrodkach
Prędkość akustyczna	$L_v = 20 \lg(v_{ak}/v_o)$	50 nm/s
Przyspieszenie	$L_a = 20 \lg(a/a_o)$	1 $\mu\text{m/s}^2$
Prędkość	$L_v = 20 \lg(v/v_o)$	1 nm/s
Siła	$L_F = 20 \lg(F/F_o)$	1 μN
Moc	$L_W = 10 \lg(W/W_o)$	1 pW
Natężenie	$L_I = 10 \lg(I/I_o)$	1 pW/m ²
Gęstość energii	$L_e = 10 \lg(e/e_o)$	1 pJ/m ³
Energia	$L_E = 10 \lg(E/E_o)$	1 pJ, (J=N/m)

Związek między skalą liniową i skalą logarytmiczną



Wartości stałych k , m oraz f_o przyjmujemy dowolnie, $k, m, f_o > 0$. Z proporcji długości odcinków mamy:

$$\frac{x}{k} = \frac{\lg\left(\frac{f_x}{f_o}\right)}{\lg\left(\frac{m f_o}{f_o}\right)} = \frac{1}{\lg m} \lg\left(\frac{f_x}{f_o}\right),$$

stąd

$$(2.2) \quad \begin{cases} x = \frac{k}{\lg m} \lg\left(\frac{f_x}{f_o}\right), \text{ [cm]}, \\ f_x = f_o 10^{\frac{x \lg m}{k}}, \text{ [Hz]}. \end{cases}$$

3. „DODAWANIE” i „ODEJMOWANIE” POZIOMÓW WARTOŚCI SKUTECZNEJ (RMS) CIŚNIENIA AKUSTYCZNEGO

3.1. „Dodawanie”

Poziom wartości skutecznej (rms) i -tego przebiegu ciśnienia akustycznego jest równy:

$$(3.1) \quad L_i = 10 \lg \left(\frac{p_{i,rms}}{p_o} \right)^2, \text{ dB}, \quad p_o = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}.$$

Średnią moc tego sygnału można zapisać w postaci: $p_{i,rms}^2 = p_o^2 10^{0.1L_i}$, Pa².

Sumaryczna moc sygnału będącego sumą n **niezależnych** sygnałów oraz poziom wartości skutecznej sygnału sumarycznego są równe:

$$(3.2) \quad p_{rms}^2 = \sum_{i=1}^n p_{i,rms}^2,$$

$$L_{\Sigma} = 10 \lg \left(\frac{p_{rms}}{p_o} \right)^2 = 10 \lg \left(\sum_{i=1}^n 10^{0.1L_i} \right), \text{ dB}.$$

Korzystając z następujących wzorów na pochodną funkcji logarytmicznej i wykładniczej

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e,$$

$$\frac{d(a^{mx})}{dx} = ma^{mx} \ln a,$$

$$\log_a e \ln a = 1,$$

wyznaczamy metodą różniczki zupełnej błąd bezwzględny poziomu wartości skutecznej sygnału sumarycznego L_{Σ} wg (3.2), który jest równy:

$$(3.3) \quad \Delta L_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial L_{\Sigma}}{\partial L_i} \right| \Delta L_i = \sum_{i=1}^n 10^{0.1(L_i - L_{\Sigma})} \Delta L_i, \text{ dB},$$

gdzie:

$$\frac{\partial L_{\Sigma}}{\partial L_i} = \frac{10 \lg e}{\sum_i 10^{0.1L_i}} 0.1 \times 10^{0.1L_i} \ln 10 = 10^{0.1(L_i - L_{\Sigma})}.$$

Jeżeli błędy pomiaru L_i są jednakowe, tj. $\Delta L_i = \Delta L$ dla każdego $i=1, \dots, n$, to $\Delta L_{\Sigma} = \Delta L$.

Błąd bezwzględny poziomu wartości skutecznej sygnału sumarycznego L_{Σ} wg (3.2) obliczony metodą „propagacji błędów”, czyli błąd średniokwadratowy jest równy:

$$(3.4) \quad \Delta L_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L_{\Sigma}}{\partial L_i} \right)^2 \sigma_{L_i}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n 10^{0.2(L_i - L_{\Sigma})} \sigma_{L_i}^2}, \text{ dB}.$$

Jeżeli błędy pomiaru poziomów L_i są jednakowe, tj. $\sigma_{L_i} = \sigma_L$ dla każdego $i=1, \dots, n$, to w tym przypadku błąd średniokwadratowy jest równy:

$$(3.4a) \quad \Delta L_{\Sigma} = \Delta L \sqrt{\sum_{i=1}^n 10^{0.2(L_i - L_{\Sigma})}}, \text{ dB}.$$

Należy zauważyć, że błąd bezwzględny obliczony metodą różniczki zupełnej wg (3.3) jest zawsze większy lub równy od błędu obliczonego metodą „propagacji błędów” wg (3.4).

Przykład 3.1.

Zmierzono poziomy wartości skutecznej (rms) ciśnienia akustycznego dwóch niezależnych przebiegów:

$$L_1 = 60 \pm 1 \text{ dB}, \quad L_2 = 66 \pm 2 \text{ dB}.$$

Obliczyć poziom wartości skutecznej (rms) ciśnienia akustycznego sygnału sumarycznego oraz jego błąd bezwzględny metodą różniczki zupełnej i metodą „propagacji błędów”.

Korzystamy ze wzoru (3.2):

$$L_{\Sigma} = 10 \lg(10^{0.1 \cdot 60} + 10^{0.1 \cdot 66}) = 67 \text{ dB}.$$

Błąd bezwzględny obliczony metodą różniczki zupełnej wg (3.3):

$$\Delta L_{\Sigma} = 1 \cdot 10^{0.1(60-67)} + 2 \cdot 10^{0.1(66-67)} = 1.79 \text{ dB}.$$

Błąd bezwzględny obliczony metodą „propagacji błędów” wg (3.4):

$$\Delta L_{\Sigma} = \sqrt{1^2 \cdot 10^{0.2(60-67)} + 2^2 \cdot 10^{0.2(66-67)}} = 1.6 \text{ dB}.$$

3.2. „Odejmnwanie”

Poziom wartości skutecznej (rms) ciśnienia akustycznego (sygnału) został zmierzony w obecności szumu o poziomie L_n . Poziom tego sygnału + szumu jest L_{s+n} . Wyznaczyć poziom wartości skutecznej samego sygnału L_s .

Zakładamy, że sygnał i szum są niezależnymi przebiegami, zatem sumaryczna moc sygnału+szum jest równa:

$$p_{s+n}^2 = p_s^2 + p_n^2,$$

stąd moc i poziom wartości skutecznej samego sygnału są równe:

$$\begin{aligned} p_s^2 &= p_{s+n}^2 - p_n^2 = p_o^2 \left(10^{0.1L_{s+n}} - 10^{0.1L_n} \right), \\ (3.5) \quad L_s &= 10 \lg \left(\frac{p_s}{p_n} \right)^2 = 10 \lg \left(10^{0.1L_{s+n}} - 10^{0.1L_n} \right) = \\ &= L_{s+n} + 10 \lg \left(1 - 10^{-0.1(L_{s+n} - L_n)} \right), \text{ dB} \end{aligned}$$

Błąd bezwzględny poziomu wartości skutecznej samego sygnału, obliczony metodą różniczki zupełnej, jest równy:

$$(3.6) \quad \Delta L_s = 10^{0.1(L_{s+n} - L_s)} \Delta L_{s+n} + 10^{0.1(L_n - L_s)} \Delta L_n, \text{ dB}$$

Przykład 3.2.

Zmierzono poziomy wartości skutecznej (rms) sygnału+szum i samego szumu (tła akustycznego):

$$L_{s+n} = 67 \pm 2 \text{ dB}, \quad L_n = 60 \pm 1 \text{ dB}.$$

Obliczyć poziom wartości skutecznej samego sygnału oraz błąd bezwzględny metodą różniczki zupełnej i metodą „propagacji błędów”.

Korzystamy ze wzorów (3.5), (3.6) i (3.4):

$$\begin{aligned} L_s &= 67 + 10 \lg \left(1 - 10^{-0.1(67-60)} \right) = 66 \text{ dB}, \\ \Delta L_s &= 2 \cdot 10^{0.1(67-66)} + 1 \cdot 10^{0.1(60-66)} = 2.77 \text{ dB}, \\ \Delta L_s &= \sqrt{2^2 \cdot 10^{0.2(67-66)} + 1^2 \cdot 10^{0.2(60-66)}} = 2.53 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Zadanie 3.1. Oznaczając we wzorze (3.5) „poprawkę ze względu na szum” przez

$$\Delta L = 10 \lg \left(1 - 10^{-0.1(L_{s+n} - L_n)} \right), \text{ dB},$$

wykreślić przebieg zależności $\Delta L = f(L_{s+n} - L_n)$, dB.

3.3. Błąd względny w mierze logarytmicznej

Oznaczenia: A – nieznaną ale dokładną wartość danej wielkości.

A^* - znana ale przybliżona (np. zmierzona) wartość danej wielkości, czyli estymator A .

Błąd bezwzględny wielkości A : $|A - A^*| \leq \Delta_A$.

Błąd względny wielkości A (względna niepewność pomiaru):

$$\delta_A = \left| \frac{A - A^*}{A^*} \right| \geq 0,$$

$$1 - \delta_A \leq \frac{A}{A^*} \leq 1 + \delta_A.$$

Logarytmując stronami ostatnią nierówność otrzymamy:

$$10 \lg(1 - \delta_A) \leq \Delta L_A \leq 10 \lg(1 + \delta_A), \text{ dB}$$

gdzie

$$\Delta L_A = 10 \lg \frac{A}{A^*} = L_A - L_{A^*}, \text{ dB}$$

Długość przedziału błędu w mierze logarytmicznej jest zatem równa (por. rys. 3.1):

$$L_\delta = 10 \lg \frac{1 + \delta_A}{1 - \delta_A}, \text{ dB.}$$

Jeżeli błąd w mierze logarytmicznej zdefiniujemy jako moduł różnicy poziomów

$$(3.7) \quad \underline{\Delta L_A = \left| 10 \lg \frac{A}{A^*} \right| = |L_A - L_{A^*}|,}$$

to prawdziwe jest następujące twierdzenie (por. rys. 3.1):

Twierdzenie.

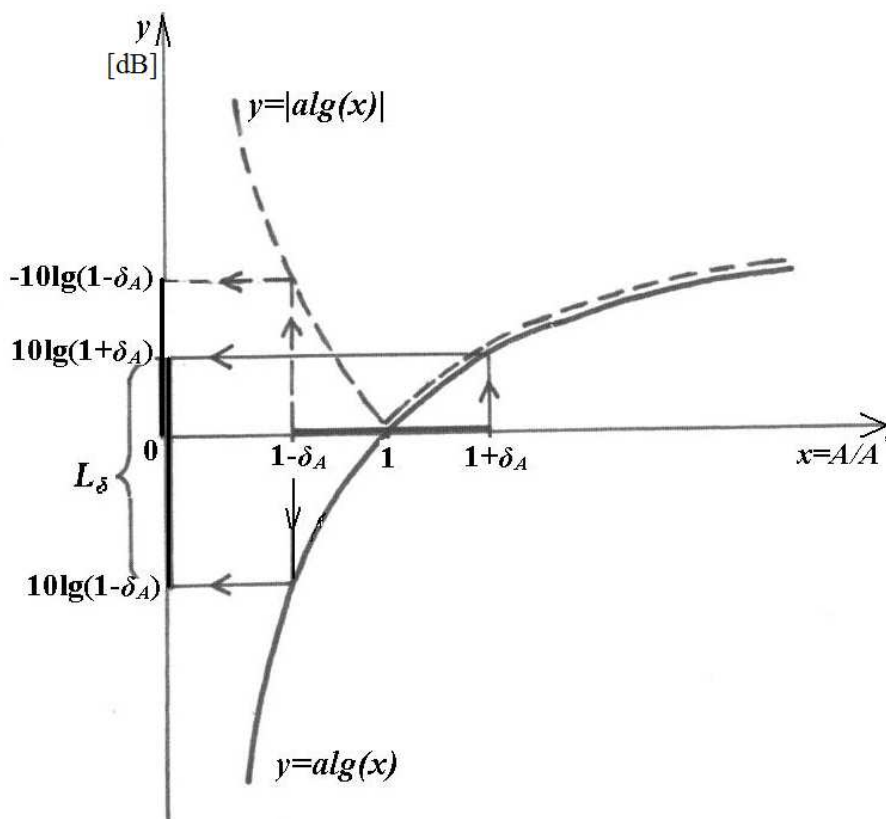
Jeżeli zachodzi relacja: $1 - \delta_A \leq \frac{A}{A^*} \leq 1 + \delta_A$, to spełnione są następujące nierówności:

$$(i) \quad \begin{cases} \Delta L_A = |L_A - L_{A^*}| \leq -a \lg(1 - \delta_A), \text{ dB,} \\ \delta_A \leq 1 - 10^{-\frac{1}{a} \Delta L_A}. \end{cases} \quad a > 0$$

oraz

$$(ii) \quad \begin{cases} a \lg(1 - \delta_A) \leq \Delta L_A \leq a \lg(1 + \delta_A), \\ L_\delta = a \lg \frac{1 + \delta_A}{1 - \delta_A}. \end{cases} \quad \text{dB}$$

Uwaga: Jeżeli wielkość A nie jest wielkością „mocową”, to stała $a = 10$, natomiast jeżeli A nie jest wielkością „mocową”, to $a = 20$ (patrz tabela 2.1).



Rys.3.1. Interpretacja geometryczna błędu względnego w mierze logarytmicznej.

Przykład 3.3

Wg Zarządzenia Nr 195 Prezesa GUM z dnia 29.12.1995, §16, błąd podstawowy miernika, wyznaczony za pomocą wzorcowego źródła ciśnienia akustycznego, nie powinien przekraczać wartości podanych w tabelicy:

Klasa dokładności miernika	0	1	2	3
Błąd podstawowy, dB	±0.4	±0.7	±1.0	±1.5

Miernikiem klasy 2 zmierzono poziom wartości skutecznej (rms) ciśnienia akustycznego równy $L_{A^*} = 60$ dB, $\Delta L_A = 1$ dB. Wynikiem pomiaru jest zatem przedział: $59 \text{ dB} \leq L_A \leq 61 \text{ dB}$. Obliczyć wartość rms ciśnienia akustycznego i błąd względny.

$$L_{A^*} = 20 \lg \left(\frac{p^*}{p_o} \right), \rightarrow p^* = p_o 10^{0.05 L_{A^*}} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Pa.}$$

$$\delta_A \leq 1 - 10^{-0.05 \Delta L_A} = 1 - 10^{-0.05 \cdot 1} = 0.11$$

Wynikiem obliczeń jest więc przedział:

$$p^* (1 - \delta_A) \leq p \leq p^* (1 + \delta_A),$$

$$1.78 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \leq p \leq 2.22 \cdot 10^{-2} \text{ Pa.}$$

4. FILTRY KOREKCYJNE i POZIOM DŹWIĘKU

Aby mierniki poziomu dźwięku „potrafiły” naśladować właściwości ucha ludzkiego i mierzyć poziom ciśnienia akustycznego w taki sposób, aby odczyty miernika odpowiadały względnej głośności dźwięków wprowadzono poziomy dźwięku.

Poziom dźwięku jest to poziom wartości skutecznej (rms) ciśnienia akustycznego skorygowany wg krzywej korekcyjnej A lub C wg wzoru:

$$(4.1) \quad L_{A,C} = 10 \lg \left(\sum_{i=1}^N 10^{0.1(L_i + K_{A,C})} \right), \text{ dB},$$

gdzie: L_i - poziom wartości skutecznej ciśnienia akustycznego w i -tym paśmie częstotliwości,
 $K_{A,C}$ - wartość poprawki wg krzywej korekcyjnej A lub C odpowiednio wg wzorów (4.1) i (4.2),
 N - liczba częstotliwości.

Mierniki poziomu dźwięku mają wbudowane filtry korekcyjne A i C, których charakterystyki częstotliwościowe są odwróconymi „do góry nogami” i wygładzonymi krzywymi izofonicznymi (por. rys. 1.1), które odpowiadają:

- krzywa korekcyjna A – 40 fonom,
- krzywa korekcyjna C – 100 fonom.

Postać analityczna krzywych korekcyjnych A i C, wg PN-EN 61672-1: 2005, jest dla dowolnej częstotliwości f w Hz następująca:

$$(4.1) \quad A(f) = 20 \lg \left[\frac{f_4^2 f^4}{(f^2 + f_1^2)(f^2 + f_2^2)^{1/2} (f^2 + f_3^2)^{1/2} (f^2 + f_4^2)} \right] - A_{1000}, \text{ dB}$$

$$(4.2) \quad C(f) = 20 \lg \left[\frac{f_4^2 f^2}{(f^2 + f_1^2)(f^2 + f_4^2)} \right] - C_{1000}, \text{ dB}$$

gdzie A_{1000} i C_{1000} są stałymi normującymi w dB, potrzebne do uzyskania wartości charakterystyk korekcyjnych równych 0 dB dla $f = 1$ kHz.

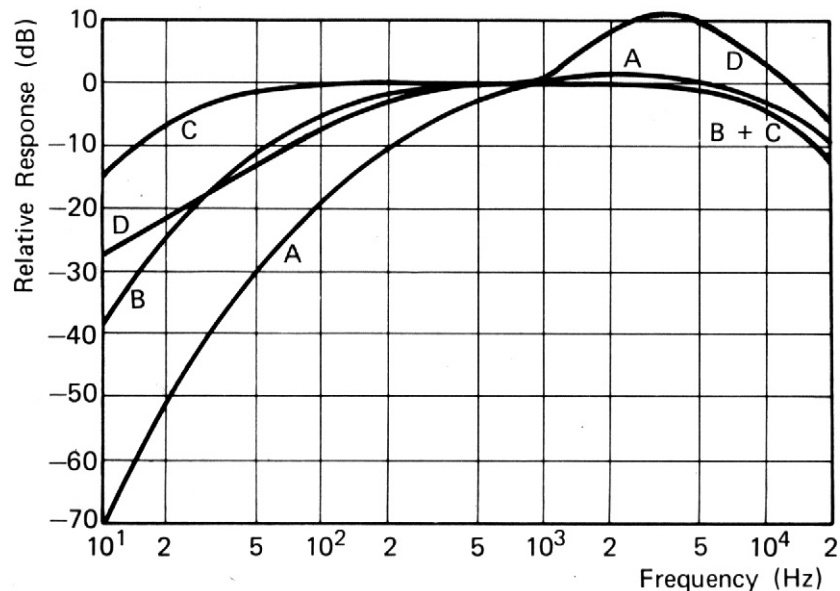
Przybliżone wartości częstotliwości od f_1 do f_4 we wzorach (4.1) i (4.2) wynoszą:

$$f_1 = 20.6 \text{ Hz}, \quad f_2 = 107.7 \text{ Hz}, \quad f_3 = 737.9 \text{ Hz}, \quad f_4 = 12194 \text{ Hz}.$$

Stałe normujące są równe: $A_{1000} = -0.062$ dB, $C_{1000} = -2.0$ dB.

Tabela 4.1. Wartości krzywej korekcyjnej A dla częstotliwości środkowych f_m pasm 1/3 oktawowych.

f_m (Hz)	16	20	25	31.5	40	50	63	80	100	125
K_A (dB)	-56.7	-50.5	-44.7	-39.4	-34.6	-30.2	-26.2	-22.5	-19.1	-16.1
f_m (Hz)	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250
K_A (dB)	-13.4	-10.9	-8.6	-6.6	-4.8	-3.2	-1.9	-0.8	0	0.6
f_m (Hz)	1600	2000	2500	3150	4000	5000	6300	8000	10000	12500
K_A (dB)	1.0	1.2	1.3	1.2	1.0	0.5	-0.1	-1.1	-2.5	-4.3



Rys.4.1. Przebiegi krzywych korekcyjnych A, B i C w funkcji częstotliwości f .

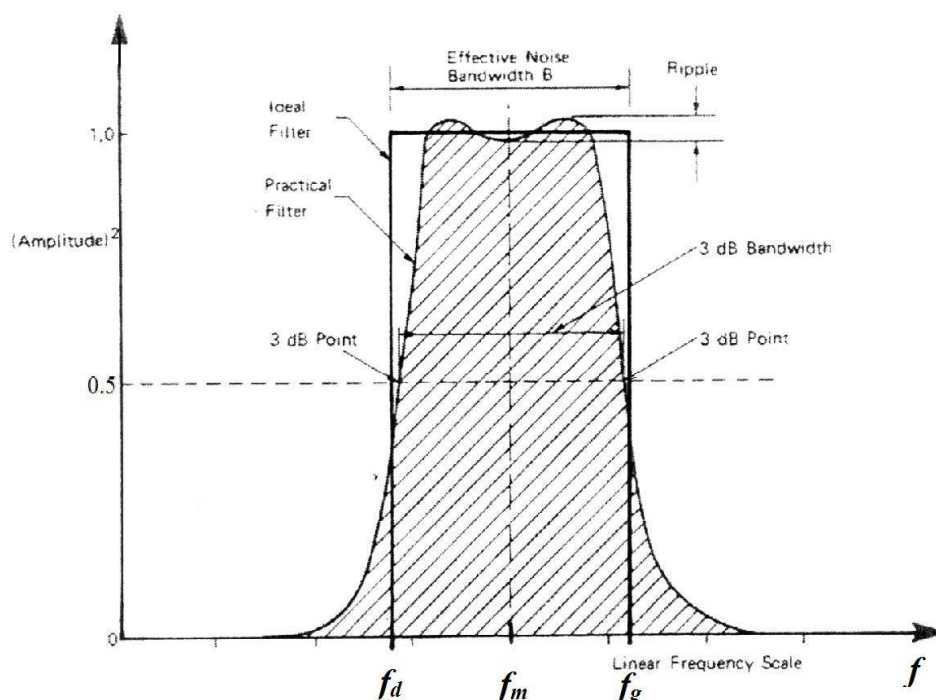
Przykład 4.1

Obliczyć poziom dźwięku A w paśmie częstotliwości $63 \div 8000$ Hz, jeżeli poziom wartości skutecznej ciśnienia akustycznego w każdym paśmie 1/10ktawowym $i = 1, \dots, 8$ wynosi $L_i = 60$ dB.

$$L_A = L_i + 10 \lg \left(\sum_{i=1}^8 10^{0.1 K_{Ai}} \right) = 60 + 8.18 = 68.18 \text{ dB},$$

$$L_{LIN} = L_i + 10 \lg N = 60 + 9 = 69 \text{ dB}.$$

5. PARAMETRY CZĘSTOLIWOŚCIOWEGO FILTRU PASMOWEGO



Rys. 5.1. Charakterystyka częstotliwościowa filtra pasmowego; f_d, f_g - dolna i górna częstotliwość, f_m - częstotliwość środkowa, B – szerokość pasma.

5.1. Częstotliwości graniczne

Częstotliwości graniczne filtra, dolna i górna, są to częstotliwości dla których tłumienie filtra jest o 3 dB mniejsze od poziomu maksymalnego (por. rys. 5.1).

5.2. Częstotliwość środkowa

Częstotliwość środkowa filtrów o stałej bezwzględnej szerokości pasma jest średnią arytmetyczną dolnej i górnej częstotliwości pasma:

$$f_m = \frac{1}{2}(f_d + f_g),$$

natomiast filtrów o stałej względnej (procentowej) szerokości pasma jest średnią geometryczną:

$$f_m = \sqrt{f_d f_g}.$$

5.3. Szerokość pasma

Szerokość pasma częstotliwości filtra jest różnicą górnej i dolnej częstotliwości pasma:

$$B = f_g - f_d, \text{ Hz.}$$

Efektywna szerokość pasma jest to szerokość idealnego filtra, przez który jest transmitowana taka sama moc szumu białego jak przez filtr rzeczywisty i jest w przybliżeniu równa 3 dB szerokości pasma (por. rys. 5.1).

Szerokość pasma może być również wyrażona w procentach częstotliwości środkowej (względna szerokość pasma)

$$B_m = \frac{f_g - f_d}{f_m} 100\%,$$

lub oktavach B_2 i dekadach B_{10}

$$B_2 = \log_2 \left(\frac{f_g}{f_d} \right), \text{ oktawy,}$$

$$B_{10} = \log_{10} \left(\frac{f_g}{f_d} \right), \text{ dekady.}$$

5.4. Filtry o stałej względnej szerokości pasma

Filtr pasmowy dla którego stosunek górnej i dolnej częstotliwości pasma jest stały, a częstotliwość środkowa filtru f_m jest ich średnią geometryczną:

$$(5.1) \quad \frac{f_g}{f_d} = a > 1, \quad f_m = \sqrt{f_d f_g},$$

jest filtrem o stałej względnej szerokości pasma.

Jeżeli $a = 2$ filtr jest 1/1 oktawowym, natomiast jeżeli $a = 10$ filtrem 1/1 dekadowym.
Słuszne są zatem następujące zależności:

$$(5.2) \quad \frac{f_m}{f_d} = \frac{f_g}{f_m} = \sqrt{a}, \quad B = f_g - f_d = f_m \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = c f_m.$$

Szerokość pasma B filtru o stałej względnej szerokości pasma jest więc funkcją liniową częstotliwości f , przy czym stała proporcjonalności c jest równa:

$$(5.3) \quad c = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} > 0.$$

Np. dla filtru 1/1 oktawowego $a = 2$, zatem szerokość pasma B jest równa:

$$B = f_g - f_d = f_m \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{f_m}{\sqrt{2}} = 0.707 f_m.$$

Tabela 5.1. Częstotliwości: środkowa f_m , dolna i górna filtrów 1/1oktawowych.

f_m , Hz	16	31.5	63	125	250	500	1k	2k	4k	8k	16k
B , Hz	11.2- 22.4	22.4- 44.7	44.7- 89.1	89.1- 178	178- 355	355- 708	0.708- 141k	1.41- 2.82k	2.82- 5.62k	5.62- 11.2k	11.2- 22.4k

5.4.1. Filtr o szerokości części oktawy lub dekady

Filtry o szerokości części oktawy ($1/b$ oktawowe) lub części dekady ($1/b$ dekadowe) są filtrami pasmowymi, dla których iloraz górnej i dolnej częstotliwości granicznej wynosi:

$$\frac{f_g}{f_d} = a^{\frac{1}{b}},$$

gdzie $\frac{1}{b}$, $b \geq 1$ jest wskaźnikiem szerokości pasma, stosowanym do określenia części oktawy ($a = 2$) lub dekady ($a = 10$). Np. dla filtru $1/3$ oktawowego (tercjowego): $a = 2$, $b = 3$, $\frac{f_g}{f_d} = 2^{\frac{1}{3}}$, zatem na podstawie (5.2) szerokość pasma jest równa:

$$B = f_g - f_d = f_m \left(2^{\frac{1}{6}} - 2^{-\frac{1}{6}} \right) = 0.23 f_m.$$

Zadanie 5.1.

Obliczyć szerokość pasma częstotliwości B filtrów $1/1$ oktawowego i $1/3$ oktawowego w funkcji częstotliwości środkowej filtrów f_m , jeżeli częstotliwość f_m jest średnią arytmetyczną górnej i dolnej częstotliwości pasma.

Zadanie 5.2.

Wykazać, że filtr pasmowy o szerokości $1/3$ oktawy (tercjowy) ma tą samą szerokość co filtr o szerokości $1/10$ dekady.

Ile oktaw ma dekada?

6. ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY GĘSTOŚCIĄ WIDMOWĄ MOCY SYGNAŁU, JEGO POZIOMEM WARTOŚCI SKUTECZNEJ I PARAMETRAMI FILTRU

Średnia moc sygnału za czas T jest równa : $x_{rms,T}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$, przy czym „moc” oznacza tu jedynie kwadrat zmiennej $x(t)$, niezależnie od jej jednostek i aby była mocą fizyczną wyrażoną w watach, należy ją pomnożyć przez odpowiednią wymiarową stałą.

Def. Gęstość widmowa (spektralna) mocy sygnału za czas T jest to średnia moc sygnału przypadająca na jednostkę częstotliwości za czas T :

$$(6.1) \quad G_T(f) = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{x_{rms,T}^2}{B} \quad \text{lub} \quad G_{T,B} = \frac{x_{rms,T}^2}{B},$$

gdzie $B = f_g - f_d$ jest szerokością pasma częstotliwości w Hz.

Tw. Parsewal'a:

$$(6.2) \quad x_{rms,T}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \int_{f_d}^{f_g} G_T(f) df.$$

Jeżeli gęstość widmowa sygnału $x(t)$ jest funkcją potęgową typu:

$$(6.3) \quad G_T(f) = \frac{C}{f^\beta}, \quad C > 0 - \text{stała wymiarowa}, [C] = [G][f^\beta].$$

to dla $\beta = 0$ sygnał $x(t)$ jest białym szumem losowym, dla $\beta = 1$ różowym szumem losowym i dla $\beta = 2$ szumem losowym Brown'a.

Po podstawieniu (6.3) do (6.2) otrzymujemy:

- dla białego szumu losowego, $\beta = 0$

$$(6.4) \quad x_{rms,T}^2 = \int_{f_d}^{f_g} C df = CB, \quad B = f_g - f_d > 0,$$

- dla różowego szumu losowego, $\beta = 1$

$$(6.5) \quad x_{rms,T}^2 = \int_{f_d}^{f_g} \frac{C}{f} df = C \ln\left(\frac{f_g}{f_d}\right), \quad f_g > f_d > 0,$$

- dla losowego szumu Brown'a, $\beta = 2$

$$(6.6) \quad x_{rms,T}^2 = \int_{f_d}^{f_g} \frac{C}{f^2} df = -C f^{-1} \Big|_{f_d}^{f_g} = C \frac{B}{f_d f_g}, \quad B = f_g - f_d > 0.$$

Dla każdego rodzaju szumu wartość skuteczna (rms) sygnału istotny sposób zależy od parametrów filtru. W dalszym ciągu rozważone zostaną dwa podstawowe typy filtrów:

- o stałej szerokości pasma $B = \text{const}$.
- o stałej względnej szerokości pasma $B = cf, c > 0$.

6.1. Filtry o stałej szerokości pasma $B = f_g - f_d = \text{const.} > 0$.

Dla tego typu filtrów częstotliwość środkowa f_m jest średnią arytmetyczną dolnej i górnej częstotliwości pasma:

$$f_m = \frac{1}{2}(f_d + f_g).$$

Do dalszej analizy wygodnie jest wprowadzić zmienną:

$$x = \frac{2f_m}{B} > 1.$$

Słuszne są zatem następujące zależności:

$$(6.7) \quad \begin{cases} \frac{f_g}{f_d} = \frac{2f_m + B}{2f_m - B} = \frac{x+1}{x-1}, \\ f_d f_g = \left(f_m + \frac{B}{2}\right) \left(f_m - \frac{B}{2}\right) = \left(\frac{B}{2}\right)^2 (x^2 - 1). \end{cases}$$

Po podstawieniu (6.7) do (6.4)-(6.6) poziom wartości skutecznej (rms) dla poszczególnych rodzajów szumu jest równy:

- dla białego szumu losowego, $\beta = 0$

$$(6.8) \quad L = 10 \lg \left(\frac{x_{rms,T}^2}{x_o^2} \right) = L_C + 10 \lg \frac{B}{B_o}, \text{ dB wzgl. } x_o \text{ i } B_o,$$

- dla różowego szumu losowego, $\beta = 1$

$$(6.9) \quad L = L_C + 10 \lg \left(\ln \frac{x+1}{x-1} \right), \text{ dB},$$

- dla losowego szumu Brown'a, $\beta = 2$

$$(6.10) \quad L = L_C - 10 \lg \frac{B}{B_o} - 10 \lg (x^2 - 1) + 6, \text{ dB}.$$

6.2. Filtry o stałej względnej szerokości pasma $\frac{f_g}{f_d} = \text{const.}$

Dla tego typu filtrów stosunek górnej i dolnej częstotliwości pasma jest stały, a częstotliwość środkowa filtru f_m jest ich średnią geometryczną:

$$\frac{f_g}{f_d} = a > 1, \quad f_m = \sqrt{f_d f_g}.$$

Słuszne są zatem następujące zależności:

$$(6.11) \quad \frac{f_m}{f_d} = \frac{f_g}{f_m} = \sqrt{a}, \quad B = f_g - f_d = f_m \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = c f_m.$$

Szerokość pasma B filtru o stałej względnej szerokości pasma jest więc funkcją liniową częstotliwości f , przy czym stała proporcjonalności jest równa:

$$c = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} > 0.$$

Na podstawie (6.4)-(6.6) i (6.11) poziom wartości skutecznej (rms) sygnału $x(t)$ dla poszczególnych rodzajów szumu jest równy:

- dla białego szumu losowego, $\beta = 0$

$$(6.12) \quad L = 10 \lg \left(\frac{x_{rms,T}^2}{x_o^2} \right) = L_c + 10 \lg \frac{f}{f_o} + 10 \lg c, \text{ dB wzgl. } x_o \text{ i } f_o,$$

- dla różowego szumu losowego, $\beta = 1$

$$(6.13) \quad L = L_c + 10 \lg (\ln a), \text{ dB},$$

- dla losowego szumu Brown'a, $\beta = 2$

$$(6.14) \quad L = L_c - 10 \lg \frac{f}{f_o} + 10 \lg c, \text{ dB}.$$

Przykład 6.1.

Poziom wartości skutecznej (rms) przyspieszenia drgań w paśmie 1/1 oktawowym o częstotliwości środkowej $f_1 = 100$ Hz i $a_1 = 2$, wynosi $L_a = 60.0$ dB.

Obliczyć poziom wartości skutecznej (rms) prędkości drgań L_v w paśmie 1/3 oktawowym (tercjowym) o częstotliwości środkowej $f_2 = 200$ Hz i $a_2 = 2^{1/3}$, jeżeli gęstość widmowa mocy przyspieszenia drgań jest taka jak szumu różowego: $G_a(\omega) = \frac{C}{\omega}$.

Zależność między przyspieszeniem a prędkością drgań jest następująca:

$$v(t) = \int a(t) dt.$$

Korzystając z własności transformaty Fouriera dotyczących pochodnej i całki przebiegu $x(t)$:

$$F \{ x^{(n)}(t) \} = (j\omega)^n X(\omega),$$

$$F \left\{ \underbrace{\int dt \dots \int}_{n\text{-krotnie}} x(t) dt \right\} = \frac{1}{(j\omega)^n} X(\omega),$$

przy czym górny symbol (n) oznacza n -tą pochodną $x(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, otrzymujemy związek między gęstością widmową mocy prędkości i przyspieszenia drgań:

$$G_v(\omega) = \frac{1}{\omega^2} G_a(\omega).$$

Na podstawie tw. Parsewala (6.2) wartości skuteczne przyspieszenia i prędkości drgań są równe:

$$a_{rms}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt = \int_{\omega_d}^{\omega_g} G_a(\omega) d\omega = C \ln \left(\frac{\omega_g}{\omega_d} \right),$$

$$v_{rms}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \int_{\omega_d}^{\omega_g} \frac{1}{\omega^2} G_a(\omega) d\omega = C \int_{\omega_d}^{\omega_g} \frac{1}{\omega^3} d\omega = \frac{C}{2} \frac{\omega_g^2 - \omega_d^2}{(\omega_d \omega_g)^2}.$$

Stąd

$$(i) \quad \frac{a_{rms}^2}{v_{rms}^2} = 2 \frac{(\omega_d \omega_g)^2}{\omega_g^2 - \omega_d^2} \ln \left(\frac{\omega_g}{\omega_d} \right).$$

Jest to ogólna zależność dla dowolnego typu filtrów, słuszna tylko dla różowego szumu losowego.

Dla filtrów o stałej względnej szerokości pasma: $\frac{\omega_g}{\omega_d} = a > 0$, $\omega_m^2 = \omega_d \omega_g$ i

$\omega_g^2 - \omega_d^2 = \omega_m^2 \left(a - \frac{1}{a} \right)$. Przyjmując częstotliwość środkową pasma ω_m jako zmienną ω zależność (i)

można zapisać w postaci:

$$\frac{a_{rms}^2}{v_{rms}^2} = 2 \frac{\omega^2}{a - \frac{1}{a}} \ln a.$$

Stąd poziom wartości skutecznej (rms) prędkości drgań L_v w paśmie 1/3 oktawowym (tercjowym) o częstotliwości środkowej f_2 i $a_2 = 2^{1/3}$ jest równy:

$$L_v(f_2) = L_a(f_2) - 10 \lg \left(\frac{f_2}{f_o} \right)^2 + 10 \lg \left(a_2 - \frac{1}{a_2} \right) - 10 \lg (\ln a_2^2) - 10 \lg \left(\frac{\omega_o v_o}{a_o} \right)^2, \text{ dB}$$

gdzie a_o , v_o i $\omega_o = 2\pi f_o$ są wartościami odniesienia odpowiednio dla przyspieszenia, prędkości i częstotliwości drgań.

Poziom przyspieszenia L_a dla częstotliwości f_2 można wyznaczyć na podstawie wzoru (6.13):

$$\begin{cases} L_a(f_1) = L_c + 10 \lg (\ln a_1), \\ L_a(f_2) = L_c + 10 \lg (\ln a_2), \end{cases}$$

stąd

$$L_a(f_2) = L_a(f_1) + 10 \lg \left(\frac{\ln a_2}{\ln a_1} \right),$$

i po podstawieniu, ostatecznie otrzymujemy:

$$L_v(f_2) = L_a(f_1) - 10 \lg \left(\frac{f_2}{f_o} \right)^2 + 10 \lg \left(a_2 - \frac{1}{a_2} \right) - 10 \lg (\ln a_1^2) - 10 \lg \left(\frac{\omega_o v_o}{a_o} \right)^2, \text{ dB}$$

Dla wartości odniesienia równych: $a_o = 10^{-6} \text{ m/s}^2$, $v_o = 10^{-9} \text{ m/s}$, $\omega_o = 2\pi f_o$, $f_o = 1 \text{ Hz}$, poziom wartości skutecznej (rms) prędkości drgań L_v w paśmie 1/3 oktawowym o częstotliwości środkowej f_2 wynosi:

$$L_v(f_2) = 60 - 20\lg 200 + 10\lg(2^{1/3} - 2^{-1/3}) - 10\lg(2 \ln 2) - 20\lg(2\pi 10^{-3}) = 53.3 \text{ dB}.$$